ΕΦΑΡΜΟΖΟΝΤΑΣ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΠΑΚΙΔΗΣ – ΚΩΝ/ΝΟΣ ΝΤΑΓΙΑΝΤΑΣ
ΚΑΖΑΝΤΖΗ 23 ΔΥΡΡΟΥ 25
georgetsapakidis@yahoo.gr konos.d@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τόσο σε θεωρητικό επίπεδο (Διδακτική) όσο και στις αίθουσες διδασκαλίας γίνεται επιτακτική η ανάγκη να εμπεδωθούν οι μαθηματικές έννοιες, εφαρμοζόμενες στην πράξη, δηλαδή με προβλήματα συνδεδεμένα με τις άλλες επιστήμες. Στην εισήγησή μας δείχνουμε ένα δρόμο προς την κατεύθυνση αυτή, προτείνοντας τέτοιου είδους προβλήματα στην ύλη της Β΄ Λυκείου.

ABSTRACT

Both at theoretical level and in the classroom, mathematical notions have to be embedded through problems that are relevant to other sciences, problems whose source is life itself. In this article we are showing the way to this direction, by suggesting problems of this kind that are appropriate for teaching in the second class of high school.

Σχεδόν σε όλα τα κείμενα διδακτικής των μαθηματικών[1], καθώς και στις ημερίδες και τα συνέδρια της Ε.Μ.Ε. και των παραρτημάτων της[2], κατά κόρον αναφέρεται η ανάγκη σύνδεσης των Μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με την πραγματική ζωή και τις άλλες επιστήμες. Πλην όμως, η πραγματικότητα στις αίθουσες διδασκαλίας ανά τη χώρα είναι εντελώς διαφορετική, όπου τα μαθηματικά είναι αυτοαναφερόμενα και καλούνται οι μαθητές να τα εμπεδώσουν μέσω τετριμμένων ασκήσεων, οι οποίες αρχίζουν από το πουθενά, ακροβατούν στο κενό και καταλήγουν στο τίποτα με αποτέλεσμα ένα τεράστιο ερωτηματικό είναι ζωγραφισμένο στα πρόσωπα των μαθητών, που εύκολα μεταφράζεται στο «γιατί τόσος μόχθος, πόνος, χρόνος και χρήμα για ένα παιχνίδισμα συμβόλων χωρίς σημασία;».
Αρκεί να ρίξουμε μια ματιά στα θέματα των προαγωγικών εξετάσεων όλων των τάξεων Γυμνασίου και Λυκείου ανά την χώρα, και ιδίως στα θέματα των απολυτήριων Πανελληνίων εξετάσεων της Γ’ Λυκείου, όπου κυριαρχούν γριφώδεις καταστάσεις του «υπάρχει», για συναρτήσεις που δεν εμφανίστηκαν, ούτε πρόκειται να εμφανιστούν σε καμία από τις γνωστές ή άγνωστες επιστήμες.
Αν κάποιος ειδικός της μαθηματικής εκπαίδευσης μελετούσε τη θεματογραφία των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της Ελλάδας χωρίς να γνωρίζει πού βρίσκεται η χώρα μας, σίγουρα θα έβγαζε το συμπέρασμα ότι η Ελλάδα είναι ένα απομονωμένο νησί στη μέση του Ειρηνικού (ουσιαστικά του πουθενά), που δε συνδέεται και δεν έχει επαφή με τον υπόλοιπο κόσμο. Γιατί αν κάποιος ξεφυλλίσει διδακτικά βιβλία Άλγεβρας και Γεωμετρίας άλλων χωρών, ή βιβλία διαφορικού

[1] [12], [25], [18], [40], [41], [45], [16]
[2] [30], [31], [5], [44], [29], [24], [28], [35], [26], [3], [23], [22]

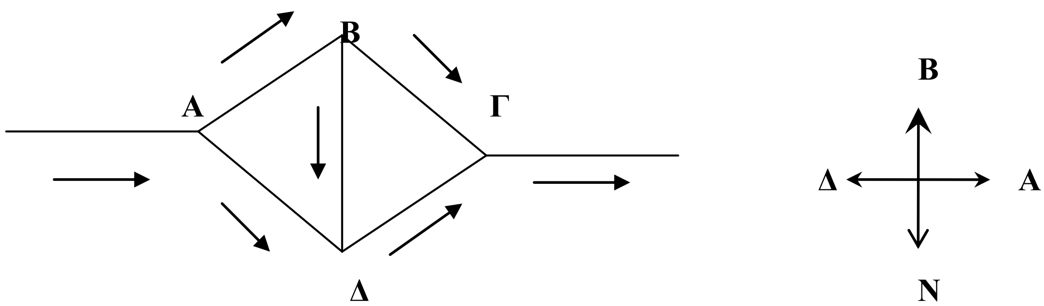
λογισμού[1] θα διαπιστώσει ότι κατά κόρον αναφέρονται στην πραγματική ζωή και τις άλλες επιστήμες.
Συνήθεις δικαιολογίες των διδασκόντων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση για το ότι δεν διδάσκουν τις εφαρμογές των μαθηματικών στις άλλες επιστήμες, δηλαδή ότι το μάθημα δε γίνεται διαθεματικά, οφείλεται στο γεγονός ότι δεν υπάρχουν τέτοιες αναφορές στα σχολικά βιβλία, αλλά τα σχολικά βιβλία είναι βιβλία για το μαθητή, και όχι για τον καθηγητή. Διδασκαλία δεν είναι η αναπαραγωγή στον πίνακα, μέσω του καθηγητή, των παραγράφων του σχολικού βιβλίου, Το σχολικό βιβλίο είναι σημείο αναφοράς για τον μαθητή. Ο ρόλος του δασκάλου μαθηματικών είναι να διεγείρει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά, να μεταφέρει στην αίθουσα τον σύγχρονο επιστημονικό προβληματισμό, να μάθει τους μαθητές να σκέφτονται και να προετοιμάσει τους αυριανούς επιστήμονες[12]. Επομένως να αναζητά συνεχώς νέες πληροφορίες στο διαδίκτυο και την παγκόσμια βιβλιογραφία. Είναι συνήθεια στη χώρα μας, όταν αναφερόμαστε σε οποιοδήποτε θέμα, να είμαστε γενικόλογοι και να ψαρεύουμε σε θολά νερά, ίσως για να μην υποστούν κριτική οι απόψεις μας. Συνειδητοποιώντας και καταγράφοντας το γεγονός αυτό, εμείς (οι συγγραφείς του άρθρου αυτού), οφείλουμε να γίνουμε συγκεκριμένοι, για αυτό στη συνέχεια θα προτείνουμε συγκεκριμένες εφαρμογές των μαθηματικών στη ζωή μας και τις επιστήμες, σε συγκεκριμένες παραγράφους της ύλης των Μαθηματικών της Β' Λυκείου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Α1) 1 gr τροφής T_1 έχει μονάδα βιταμίνης Α, 3 βιταμίνης Β, 4 βιταμίνης C και 2 βιταμίνης Ε. 1 gr τροφής T_2 έχει 2 μονάδες βιταμίνης Α, 3 βιταμίνης Β, 5 βιταμίνης C kκαι 4 βιταμίνης Ε. 1 gr τροφής T_3 έχει 3 μονάδες βιταμίνης Α, 0 βιταμίνης Β, 3 βιταμίνης C και 6 βιταμίνης Ε. Ένα άτομο που τρέφεται με τις T_1, T_2, και T_3, θέλουμε να πάρει 11 μονάδες βιταμίνης Α, 9 βιταμίνης Β, 20 βιταμίνης C και 22 βιταμίνης Ε. Ποιες είναι οι ποσότητες των τροφών T_1, T_2, T_3, που πρέπει να τραφεί το άτομο, ώστε να λάβει τις βιταμίνες που θέλουμε; **(Συστήματα) [3]**

Α2) Για να μελετήσουμε την κυκλοφορία στο κέντρο της πόλης τοποθετήσαμε μερικούς μετρητές, που κατέγραψαν:

- να έρχονται από τα δυτικά 300 αυτοκίνητα/ώρα
- να φεύγουν προς τα ανατολικά 300 αυτοκίνητα/ώρα
- να διασχίζουν το δρόμο ΒΔ 100 αυτοκίνητα/ώρα



[1] [13], [11], [14], [9], [38], [27], [1]

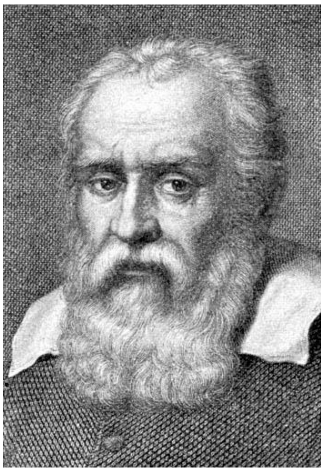
α) Είναι δυνατό να υπολογίσουμε τον αριθμό αυτοκινήτων που περνούν από κάθε δρόμο κάθε ώρα;
β) Σε ποιόν δρόμο θα βάζαμε άλλον ένα μετρητή κυκλοφορίας ώστε να υπολογίσουμε την κυκλοφορία σε κάθε δρόμο ακριβώς;
γ) Ποια είναι η ελάχιστη κυκλοφορία στον δρόμο ΑΒ με βάση τις δεδομένες πληροφορίες; **(Συστήματα) [9]**

Α3) Η πιτσαρία «Pizza Express» διαθέτει στους πελάτες της δύο είδη πίτσας, απλή και special. Το περιθώριο κέρδους για κάθε προϊόν ανέρχεται σε 1 και 1,5€ αντίστοιχα. Για την παραγωγή κάθε προϊόντος η πιτσαρία χρησιμοποιεί ζύμη και ένα μείγμα υλικών ως ακολούθως:

- μία απλή πίτσα χρειάζεται 500g ζύμης και 125 g μείγματος υλικών
- μία special χρειάζεται 500g ζύμης και 250g μείγματος.

Μία μέρα η πιτσαρία διέθετε 75 κιλά ζύμης και 25 κιλά μείγματος υλικών. Εκείνη την ημέρα η πιτσαρία έχει παραγγελίες για τουλάχιστον 50 απλές και τουλάχιστον 25 special πίτσες. Πόσες πίτσες από κάθε είδος πίτσας πρέπει να παράγει η πιτσαρία, ώστε να έχει μέγιστο κέρδος εκείνη την ημέρα; **(Συστήματα)**

Α4) Από τα πρώτα ερωτήματα που προέκυψαν με την εφεύρεση του κανονιού (μέσα $14^{ου}$ αιώνα) ήταν το πόσο μακριά μπορεί να πάει το βλήμα (δηλαδή ποιο είναι το βεληνεκές του κανονιού). Εμπειρικά βρέθηκα ότι το βεληνεκές ενός κανονιού εξαρτάται από τη γωνία βολής που σχηματίζει ο σωλήνας του κανονιού με το οριζόντιο επίπεδο. Η επιστημονική απάντηση δόθηκε μετά το 1650, αφού προηγήθηκαν ο νόμος της ελεύθερης πτώσης του Γαλιλαίου και η Γεωμετρία του Καρτέσιου.



Galileo Galilei (1564 – 1642)
Ιταλός καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Πάδουας. Θεωρείται ο πατέρας της νεότερης επιστήμης, γιατί εισήγαγε ένα νέο τρόπο μελέτης της φύσης με την καθιέρωση της μαθηματικής διατύπωσης μιας φυσικής θεωρίας και τον πειραματικό της έλεγχο. Στον Γαλιλαίο οφείλεται η διατύπωση του νόμου της ελεύθερης πτώσης των σωμάτων, η ανακάλυψη των τεσσάρων μεγαλύτερων δορυφόρων του Δία και των ηλιακών του Κοπέρνικου, πράγμα που τον έφερε σε σύγκρουση με την Καθολική Εκκλησία.

Rene Descartes (1596 – 1650)
Γάλλος φιλόσοφος και μαθηματικός. Στο περίφημο φιλοσοφικό του έργο «Λόγος περί της μεθόδου» περιέχεται ως παράδειγμα για την εφαρμογή της «μεθόδου», το παράρτημα 106 σελίδων με τον τίτλο «La geometrie», που είναι το πρώτο δημοσίευμα για τη γνωστή μας Αναλυτική Γεωμετρία. Η δημοσίευση αυτή του Καρτεσίου θεωρείται το «μεγαλύτερο μεμονωμένο βήμα που έγινα ποτέ στην εξέλιξη των θετικών επιστημών»

Το βεληνεκές (ΟΑ) ενός βλήματος που βάλλεται με αρχική ταχύτητα U_0 υπό γωνία φ, όταν η αντίσταση του αέρα θεωρηθεί αμέλημα, υπολογίζεται ως εξής: Αναλύουμε την κίνηση του βλήματος σε οριζόντια και κατακόρυφη.
Κατά την οριζόντια κίνηση το βλήμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά (αφού δεν επιδρά πάνω του καμία δύναμη) με σταθερή ταχύτητα U_0συνφ. Επομένως μετά από χρόνο t θα έχει διανύσει διάστημα:

$$x=(U_0 συνφ)t. \quad \textbf{(1)}$$

Κατά την κατακόρυφη κίνηση το βλήμα κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας με αρχική ταχύτητα U_0ημφ, άρα μετά από χρόνο t θα έχει διανύσει διάστημα

$$y=(U_0 ημφ)t-\frac{1}{2}gt^2. \quad \textbf{(2)}$$

Λύνουμε την (1) ως προς t, αντικαθιστούμε στην (2) και παίρνουμε

$$y=\frac{ημ\phi}{συν\phi}x-\frac{g}{2U_0^{\ 2}συν^2\phi}x^2. \quad \textbf{(3)}$$

Για y=0 είναι x=(ΟΑ).

Έτσι για y=0, από την (3) παίρνουμε (ΟΑ)=$\frac{2U_0 ημ\phi συν\phi}{g}$. Ποια πρέπει να είναι η γωνία φ ώστε το βεληνεκές ενός βλήματος να είναι μέγιστο; **(Τριγωνομετρία)**

Α5) Σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα: F=G $\frac{m_1 m_2}{r^2}$. Ο Ήλιος και ιδίως η Σελήνη επιδρούν πάνω στις θάλασσες με αποτέλεσμα τα νερά τους να ανασηκώνονται (πλημμυρίδα) και να αποτραβιόνται (άμπωτης) περιοδικά. Το φαινόμενο αυτό το λέμε παλίρροια. Μετά από μετρήσεις το ύψος της παλίρροιας στην είσοδο ενός λιμανιού είναι h μέτρα μετά t ώρες από τα μεσάνυχτα. Το h προσεγγίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια από τη συνάρτηση: h(t)=5+3ημ$\frac{\pi t}{6}$.

Άμπωτη και πλημμυρίδα

α) Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης h(t);
β) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της h(t) στο διάστημα [0,Τ].
γ) Πόσες ώρες μετά τα μεσάνυχτα το ύψος του νερού θα είναι 6,5 μέτρα;

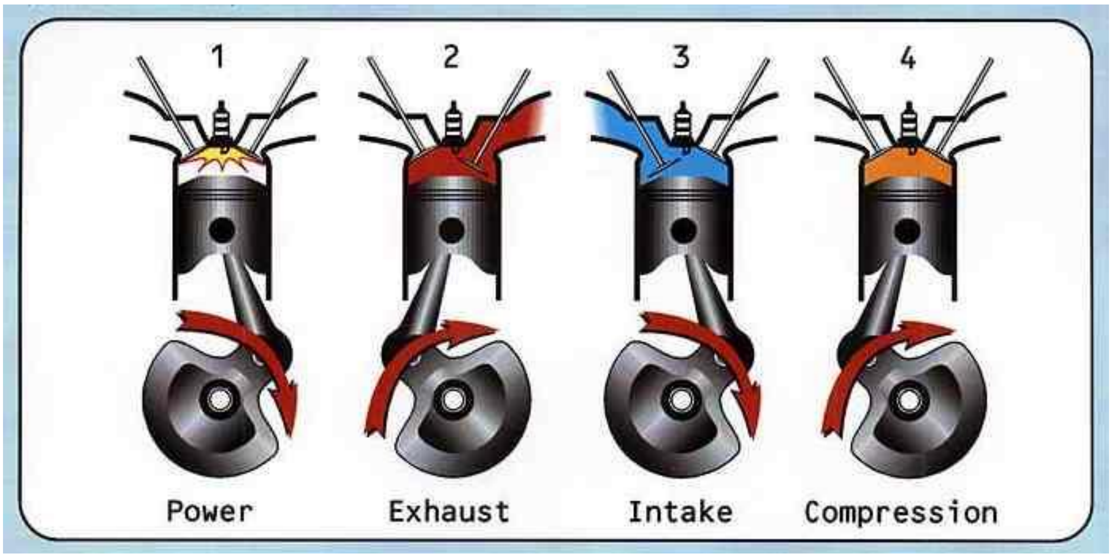
δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της h(t) να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα:

i) Ποια είναι η υψομετρική διαφορά μεταξύ της ψηλότερης πλημμυρίδας και της χαμηλότερης άμπωτης;

ii) Πόσες ώρες περνούν μεταξύ των δύο φαινομένων που αναφέρονται στο προηγούμενο ερώτημα;

iii) Ένα πλοίο μπορεί να μπει και να βγει από το λιμάνι όταν το ύψος του νερού είναι πάνω από 6,5 μέτρα. Πόσες ώρες την ημέρα μπορεί να γίνει αυτό; **(Τριγωνομετρία)**

Α6) Σε μία μηχανή εσωτερικής καύσης, η θέση του πιστονιού στον κύλινδρο μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια μιας ημιτονοειδούς συνάρτησης. Για ένα συγκεκριμένο μέγεθος και συγκεκριμένη ταχύτητα μηχανής, η κεφαλή από το πιστόνι, για t=0, στην αρχή της φάσης της αναρρόφησης βρίσκεται στην κορυφή του κυλίνδρου (απόσταση από την κορυφή είναι 0) και φτάνει σε μέγιστη απόσταση 4cm από την κορυφή (μέγιστη απόσταση), όταν t=$\frac{1}{48}s$, στην αρχή της φάσης της συμπίεσης. Μετά τη συμπίεση ακολουθεί η εκτόνωση (t=$\frac{2}{48}s$), η εξαγωγή (t=$\frac{3}{48}s$),τέλος η αναρρόφηση οπότε ξεκινούν όλα από την αρχή. Αν η περίοδος ενός τέτοιου τετράχρονου κινητήρα είναι P=$\frac{1}{24}s$, βρείτε την συνάρτηση που περιγράφει την απόσταση του πιστονιού από την κορυφή του κυλίνδρου και την απόσταση για t=$\frac{1}{9}s$. Σε ποια φάση είναι ο κινητήρας για t=$\frac{1}{9}s$; **(Τριγωνομετρία) [7]**



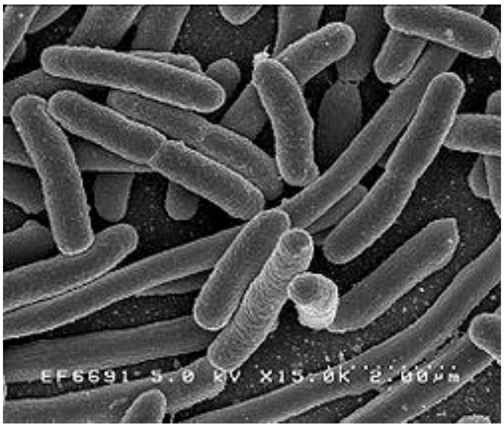
Κατά σειρά: Εκτόνωση, εξαγωγή, αναρρόφηση και συμπίεση

Α7) Το τμήμα προγραμματισμού μιας βιομηχανίας υπολογίζει ότι η παραγωγή ενός νέου προϊόντος σε ποσότητα Q τεμαχίων θα έχει κόστος TC(Q)= Q^3, επίσης υπολόγισε ότι η τιμή του προϊόντος, όταν η ζήτησή του είναι Q τεμάχια θα διαμορφωθεί στις P=110-Q χρηματικές μονάδες.

α) Να προσδιορίσετε τα ολικά έσοδα TR(Q) και το κέρδος Π(Q) της βιομηχανίας.
β) Ποιες ποσότητες πρέπει να παράγει η βιομηχανία ώστε να έχει κέρδος και ποιες ώστε να έχει ζημία;

Α8) Όσο ένα ζώο ή φυτό είναι ζωντανό, ο άνθρακας 14 βρίσκεται στους ιστούς του σε σταθερή ποσότητα. Όταν πεθαίνει σταματά να παίρνει άνθρακα 14, γι' αυτό η ποσότητά του ελαττώνεται λόγω ραδιενεργούς διάσπασης σύμφωνα με την ισότητα $A=A_0e^{-0,000124t}$ (1), όπου A είναι η ποσότητα του άνθρακα μετά t χρόνια και A_0 η ποσότητα όταν t=0.
α) Ποια είναι η ποσότητα άνθρακα 14 σε ένα κρανίο μετά από πάρα πολλά χρόνια;
β) Ποια είναι η ηλικία ενός κρανίου που περιέχει 10% της κανονικής ποσότητα του άνθρακα;
γ) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της (1) **(Εκθετική Συνάρτηση)**

Α9) Υπάρχουν πολλά είδη βακτηριδίων Escherichia Coli. Κάθε είδος έχει τον δικό του χρόνο διπλασιασμού. Ένα από αυτά τα είδη έχει χρόνο διπλασιασμού 15 λεπτά. Δηλαδή, αν έχουμε ένα βακτήριο, σε 15 λεπτά θα γίνουν 2, σε 30 λεπτά θα γίνουν 4, σε 45 λεπτά θα γίνουν 8 και λοιπά. Αν σε μία καλλιέργεια υπάρχουν 10.000 τέτοια βακτήρια:
α) Πόσα θα γίνουν σε 4 ώρες;
β) Πόσα θα γίνουν σε 24 ώρες;
γ) Πόσα θα γίνουν σε t ώρες;
δ) Αν 10^{13} βακτήρια ζυγίζουν 1 κιλό, πόσα κιλά θα ζυγίζουν τα βακτήρια που δημιουργήθηκαν στο ερώτημα (β);



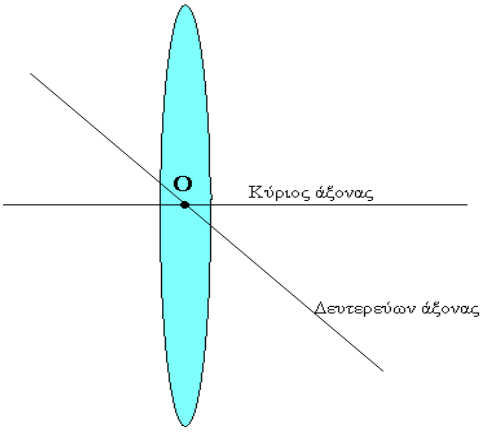
Escherichia Coli

Α10) Αν Ν είναι το πλήθος των σεισμών, που γίνονται σε ένα χρόνο σε μια συγκεκριμένη περιοχή, με μέγεθος μεγαλυτέρου ή ίσου του Μ, τότε ισχύει ο εμπειρικός στατιστικός τύπος: logN=a-bM **(1)**
Όπου a, b παράμετροι που εξαρτώνται από τη σεισμικότητα της συγκεκριμένης περιοχής.
α) Λύστε την (1) ως προς Ν.
β) Ποια είναι η περίοδος εμφάνισης σεισμού μεγέθους μεγαλυτέρου ή ίσου του Μ σε μια συγκεκριμένη περιοχή;
γ) Αν για την Ελλάδα είναι a=6,37 και b=1, ποιο είναι το χρονικό διάστημα στο οποίο αναμένεται να γίνει σεισμός μεγέθους μεγαλύτερος ή ίσος του 8;
δ) Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο σεισμός που έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα (περίπου 63%) να είναι μέγιστος στο χρονικό διάστημα t ετών έχει μέγεθος

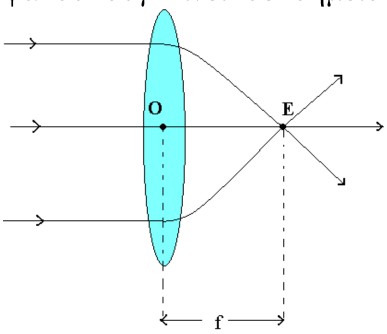
$$M_t=\frac{a+\log t}{b}$$

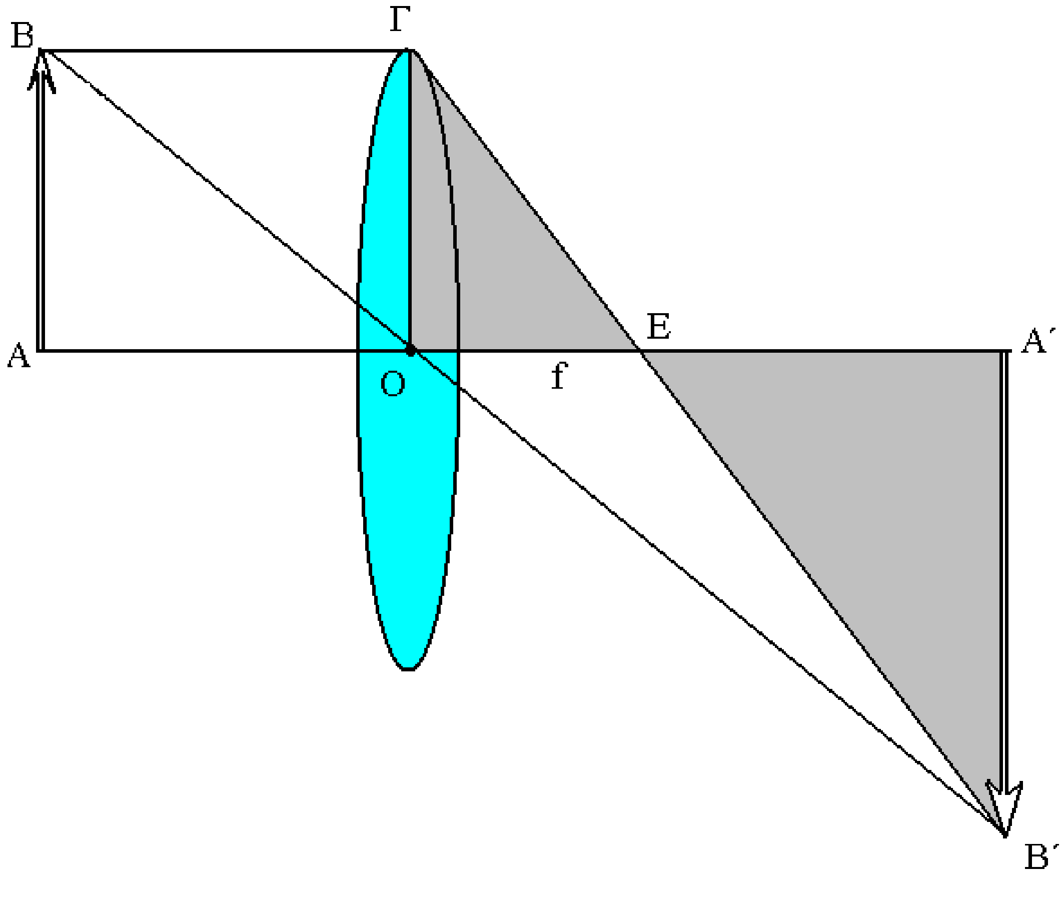
Ποιο είναι το πιθανότερο μέγιστο μέγεθος σεισμού που μπορεί να γίνει στη διάρκεια ενός έτους; Σε δέκα έτη; **(Λογαριθμική Συνάρτηση) [32]**

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ



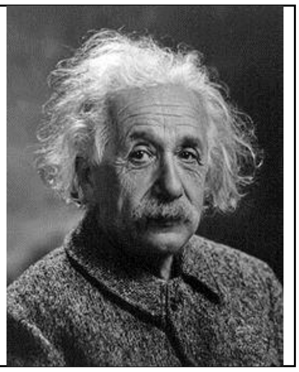
Γ1) Στις φωτογραφικές μηχανές, τα μικροσκόπια και τα τηλεσκόπια χρησιμοποιούν φακούς, που είναι οπτικά όργανα αποτελούμενα από γυαλί, που περιορίζεται από δύο σφαιρικές επιφάνειες. Η ευθεία που περνάει από τα κέντρα των δύο σφαιρικών επιφανειών του φακού λέγεται κύριος άξονας και κάθε άλλη ευθεία που περνάει από το κέντρο του φακού λέγεται δευτερεύων άξονας. Κάθε παράλληλη δέσμη φωτεινών ακτινών προς τον κύριο άξονα του φακού συγκλίνει σε σημείο Ε, που λέγεται εστία, της οποίας η απόσταση από το κέντρο του φακού λέγεται εστιακή απόσταση, που τη συμβολίζουμε με f. Στο παρακάτω σχήμα, ο φακός σχηματίζει το είδωλο Α΄Β΄ του αντικειμένου ΑΒ. Αν ΟΑ=α και ΟΒ=β, ποια είναι η σχέση που συνδέει τα α, β, f; **(Ομοιότητα) [42]**



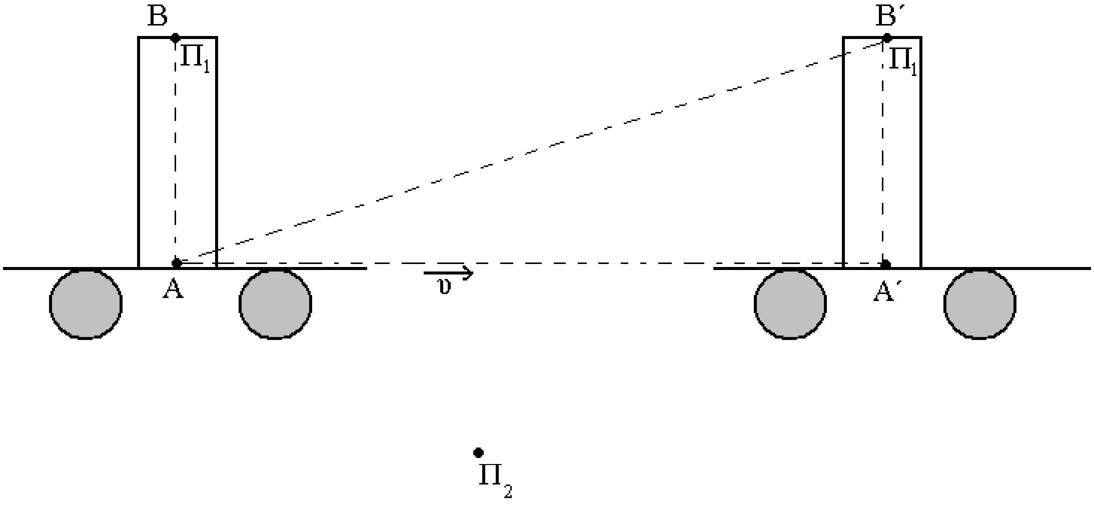


Γ2) Το πείραμα των Αμερικανών φυσικών E. Morley και A. Michelson το 1887 έδειξε ότι: η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι απόλυτο φυσικό μέγεθος, δηλαδή ένας παρατηρητής κινούμενος με οποιαδήποτε ταχύτητα ως προς μία φωτεινή πηγή, μετρώντας την ταχύτητα του φωτός στο κενό τη βρίσκει πάντοτε ίση με c=300.000 km/s. O A. Einstein το 1905, στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, θεώρησε ως θεμελιώδη φυσική αρχή το προηγούμενο πειραματικό αποτέλεσμα. Η δεύτερη θεμελιώδης αρχή της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας είναι: Για παρατηρητές, που ο ένας κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τον άλλον, οι φυσικοί νόμοι μένουν αναλλοίωτοι.

Albert Einstein (1879 – 1955)
Μυθική φυσιογνωμία της Μαθηματικής Φυσικής. Με την Ειδική και Γενική Θεωρία της Σχετικότητας άλλαξε τις απόψεις μας για τον χώρο, τον χρόνο και γενικότερα για το Σύμπαν.

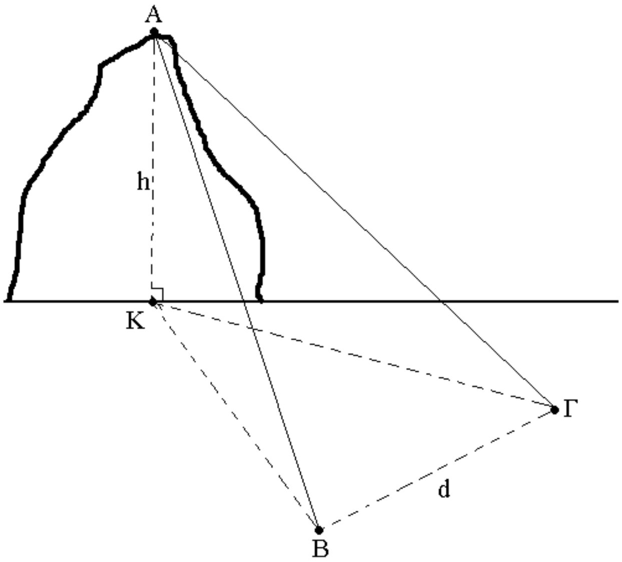


Υποθέτουμε τώρα ότι πάνω σε μία πλατφόρμα βρίσκεται ένας στήλος στο κάτω άκρο Α του οποίου είναι τοποθετημένη μια φωτεινή πηγή και στο πάνω άκρο του Β βρίσκεται ένας παρατηρητής Π_1. Τη στιγμή που η πλατφόρμα αρχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα υ ως προς ακίνητο παρατηρητή Π_2, η φωτεινή πηγή στέλνει ένα φωτεινό παλμό προς τον παρατηρητή Π_1. Στο χρονικό διάστημα που μεσολάβησε από τη στιγμή που ο φωτεινός παλμός ξεκίνησε από τη φωτεινή πηγή μέχρι να φτάσει στον παρατηρητή Π_1, η πλατφόρμα μετακινήθηκε από τη θέση ΑΒ στη θέση Α΄Β΄, όπως φαίνεται στο σχήμα.

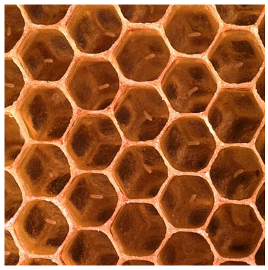


Ο φωτεινός παλμός για τον παρατηρητή Π_1 διατρέχει το τμήμα ΑΒ, ενώ για τον παρατηρητή Π_2 το τμήμα ΑΒ΄. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΑ΄Β΄ έχουμε ότι ΑΒ΄>Α΄Β΄=ΑΒ. Επειδή η ταχύτητα το φωτός είναι σταθερή και για τους δύο παρατηρητές, έχουμε $\frac{AB'}{C} > \frac{A'B'}{C}$. Αλλά απόσταση προς την ταχύτητα δίνει το χρόνο. Έτσι ο χρόνος t που απαιτείται για να διατρέξει ο φωτεινός παλμός την απόσταση ΑΒ' είναι μεγαλύτερος από το χρόνο t' που απαιτείται για να διατρέξει την απόσταση Α'Β'. Ποια σχέση συνδέει τους δύο χρόνους t και t'; **(Πυθαγόρειο Θεώρημα) [43]**

Γ3) Από την κορυφή Α ενός βουνού βλέπουμε δύο σημεία Β και Γ. Για να υπολογίσουμε το ύψος h του βουνού βρίσκουμε με γωνιόμετρο τη γωνία ΒΑΓ=θ, καθώς και τις γωνίες που σχηματίζουν οι οπτικές ακτίνες ΑΒ και ΑΓ με την κατακόρυφο ΑΚ και έστω ΚΑΒ=φ και ΚΑΓ=ω. αν γνωρίζουμε την απόσταση d των σημείων Β και Γ, πώς θα υπολογίσουμε το ύψος h του βουνού; **(Μετρικές σχέσεις στα τρίγωνα) [34]**



Γ4) Ένα αεροπλάνο φεύγει από ένα αεροπλανοφόρο και πετάει νότια με 400 km/h. Το αεροπλανοφόρο προχωράει με κατεύθυνση 60^{o} βορειοδυτικά με 32km/h. Αν το αεροπλάνο έχει καύσιμα για 5 ώρες πτήσης ποια είναι η μέγιστη απόσταση που μπορεί να ταξιδέψει το αεροπλάνο από το σημείο που απογειώθηκα, ώστε να επιστρέψει στο αεροπλανοφόρο; **(Μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο) [6]**



Γ5) Γιατί οι κηρήθρες των μελισσών έχουν σχήμα κανονικού εξαγώνου; **(Κανονικά πολύγωνα) [40]**

Γ6) Η απόσταση των πηγών ενός ποταμού από το σημείο εκβολής του στη θάλασσα είναι d. Κάντε μία εκτίμηση του μήκους της όχθης του ποταμού ως συνάρτηση του d. **(Μέτρηση κύκλου)**

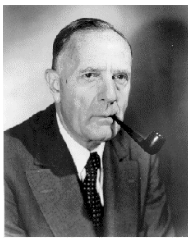
Γ7) Πώς θα μπορούσαμε να μετρήσουμε την περίμετρο μιας μικρής λίμνης; **(Μέτρηση κύκλου)**

Γ8) Πώς μπορούμε να μετρήσουμε τον όγκο ενός βαρελιού προσεγγιστικά; **(Μέτρηση κύκλου)**

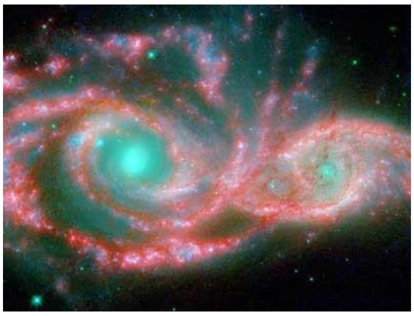
Γ9) Μια βιομηχανία χρειάζεται αποθηκευτικό χώρο σε μια πόλη για να αποθήκευση 175 κυλινδρικών κοντέινερς με ακτίνα διάμετρο 2m και ύψος 3m. Τα κοντέινερς πρέπει να τοποθετηθούν όρθια. Ο αντιπρόσωπος της βιομηχανίας στην πόλη έκανε έρευνα αγοράς και βρήκε τρεις αποθήκες. Η πρώτη με διαστάσεις 11x11 m και κόστος ενοικίασης 670 /μήνα, η δεύτερη με διαστάσεις 11x22 m και κόστος 1050 /μήνα και η τρίτη με διαστάσεις 11x33 και κόστος 1300 /μήνα. Όλες οι αποθήκες είχαν ύψος 10m. Ποια αποθήκη με μικρότερο κόστος πρέπει να διαλέξει ο αντιπρόσωπος της εταιρείας; **(Μέτρηση κύκλου) [15]**

Γ10) Γιατί οι βάσεις των ιγκλού των Εσκιμώων, των σκηνών των Ινδιάνων και των καλυβών των Αφρικανών είναι κυκλικές; **[37]**

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ



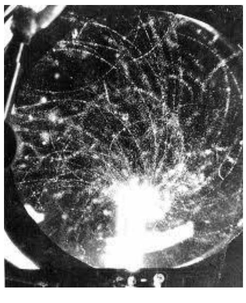
Δ1) Ο Αμερικανός αστρονόμος E. Hubble (1889-1953) το 1927 διατύπωσε το νόμο: «Όλοι οι γαλαξίες απομακρύνονται από τη γη με ακτινιακές ταχύτητες ανάλογες της απόστασης τους από τη γη».



Έτσι, αν με Γ συμβολίσουμε τη θέση της γης και με Α τη θέση ενός γαλαξία τώρα, θα είναι $\vec{u} = H_0 \overrightarrow{\Gamma A}$, όπου H_0 η σταθερά του Hubble. Ο νόμος αυτός, φαινομενικά, δίνει προνομιούχα θέση στη γη ως κέντρο του σύμπαντος, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την αρχή του Κοπέρνικου, σύμφωνα με την οποία: «η θέση τη γης δεν είναι προεξέχουσα στο σύμπαν». Μπορείτε να εξηγήσετε αυτό το παράδοξο; **(Διανύσματα) [39]**

Δ2) Ένα παραθαλάσσιο χωριό πρόκειται να συνδεθεί με δευτερεύουσα οδό με την εθνική οδό, που περνάει έξω από το χωριό. Στο σημείο συνάντησης της δευτερεύουσας οδού με την εθνική θα κατασκευαστεί ανισόπεδη διάβαση. Ο τοπογράφος της κατασκευάστριας εταιρείας χρησιμοποιεί ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η εθνική οδός έχει εξίσωση y=2x-3 και το χωριό αντιστοιχεί στο σημείο (4,10). Σε ποιο σημείο πρέπει να κατασκευαστεί η ανισόπεδη διάβαση, ώστε η απόστασή της από το χωριό να είναι ελάχιστη; **(Ευθεία)**

Δ3) Σε ένα θάλαμο Wilson παρατηρούμε τις τροχιές δύο σωματιδίων άλφα που κινούνται στο ίδιο επίπεδο και βρίσκουμε ότι κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$, οι θέσεις τους είναι (2t + 5, 3t + 2) και (4t + 1, t + 3) αντίστοιχα. α.) Να βρείτε την αρχική θέση των δύο σωματιδίων. β.) Να προσδιορίσετε τις εξισώσεις των τροχιών τους. γ.) Να εξετάσετε αν τα σωματίδια θα συγκρουστούν.



Ίχνη τροχιών σωματιδίων άλφα σε θάλαμο Wilson

<u>Σωματίδια άλφα</u> είναι πυρήνες ηλίου, οι οποίοι αποτελούνται από δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια.

<u>Θάλαμος Wilson</u> είναι μία συσκευή που περιέχει ατμούς κατάλληλου αερίου σε κατάσταση υπερκορεσμού. Με τη συσκευή αυτή έγιναν ορατές και φωτογραφήθηκαν οι τροχιές στοιχειωδών σωματιδίων. **(Ευθεία)**

Δ4) Το ραδιοτηλεσκόπιο είναι αστρονομικό όργανο που αποτελείται από ένα δέκτη ραδιοφωνικών κυμάτων και μια παραβολική κεραία η οποία ανιχνεύει τη ραδιοφωνική ακτινοβολία που εκπέμπεται από διάφορα ουράνια σώματα. Η βασική αρχή πάνω στην οποία στηρίζεται η λειτουργία του ραδιοτηλεσκοπίου είναι η ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής. Η αρχή αυτή, που αποδεικνύεται μαθηματικά είναι η εξής: οι ακτίνες μίας παράλληλης δέσμης ακτινοβολίας που έχει διεύθυνση του άξονα ενός παραβολικού κατόπτρου, ανακλώνται στην εστία του κατόπτρου. Επειδή τα ραδιοφωνικά μήκη κύματος είναι πολύ μεγαλύτερα από εκείνα του ορατού φωτός, τα ραδιοτηλεσκόπια πρέπει να είναι πολύ μεγάλα για να πλησιάσουν τη διακριτική ικανότητα των οπτικών τηλεσκοπίων. Το μεγαλύτερο ραδιοτηλεσκόπιο

Το τηλεσκόπιο στο Αρεσίμπο του Πουέρτο Ρίκο

βρίσκεται στο Αρεσίμπο του Πουέρτο Ρίκο, είναι ακίνητο, και γεμίζει μια φυσική κοιλότητα όπως φαίνεται στη φωτογραφία. Η διάμετρος της παραβολικής του κεραίας είναι 300 μέτρα. Αν η απόσταση της εστίας της παραβολικής κεραίας από την κορυφή της είναι 100 μέτρα, πόσο είναι το βάθος της; **(Παραβολή)**

Δ5) Το διάνυσμα θέσης ενός πυραύλου κάθε χρονική στιγμή t, ως προς ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο εκτόξευσης του πυραύλου, άξονα y'y την εξέδρα εκτόξευσης και άξονα x'x την τομή του εδάφους και του επιπέδου που ορίζει ο πύραυλος με την εξέδρα εκτόξευσης, είναι: $\vec{r} = (0{,}4t)\vec{i} + (1{,}2t)\vec{j}$. α) Αν $\vec{r}$ =(x,y), να εκφράσετε τα x, y ως συνάρτηση του t. β) Να βρείτε την εξίσωση f(x,y) της τροχιάς του πυραύλου. γ) Να σχεδιάσετε την τροχιά του πυραύλου. **(Παραβολή)**

Δ6) Μία εταιρεία για τις συνεδριάσεις του Διοικητικού της Συμβουλίου, παρήγγειλε από ένα ξυλουργό ένα ελλειπτικό τραπέζι συνεδριάσεων, διαστάσεων 4x3 μέτρων. Για την κατασκευή του ττραπεζιού ο ξυλουργός συγκόλλησε σανίδες που σχημάτιζαν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων 4x3 μέτρων, αλλά δεν μπορούσε να σχεδιάσει πάνω του το περίγραμμα του τραπεζιού. Μπορείτε να τον βοηθήσετε; **(Έλλειψη)**

Δ7) Ένας δρόμος μονής κατεύθυνσης περνάει κάτω από μία γέφυρα, που έχει σχήμα ημιέλλειψης. Η γέφυρα έχει πλάτος 12m και ύψος 5m. ένα μεγάλο μηχάνημα εξόρυξης μεταλλευμάτων, πλάτους 6m και ύψους 4,5m, πρόκειται να μεταφερθεί σε ένα ορυχείο. Ο μόνος δρόμος που οδηγεί στο ορυχείο είναι αυτίς που περνάει κάτω από τη γέφυρα. Αν το μηχάνημα δεν μπορεί να περάσει κάτω από τη γέφυρα, θα αποσυναρμολογηθεί, τα κομμάτια του θα μεταφερθούν στο ορυχείο, όπου θα ξανασυναρμολογηθούν. Είναι αναγκαίο να αποσυναρμολογηθεί το μηχάνημα; **(Έλλειψη)**

Δ8) Ο Γερμανός μαθηματικός και αστρονόμος Johannes Kepler (1571-1620), αφού επεξεργάστηκε τις εξαιρετικά ακριβείς καταγραφές των θέσεων των πλανητών που έκανε για είκοσι χρόνια ο Δανός αστρονόμος Tycho Brahe (1546-1601), το 1609 στο βιβλίο του «Νέα Αστρονομία» δημοσίευσε το βασικό νόμο της κίνησης των πλανητών, που είναι ο: «Η τροχιά κάθε πλανήτη είναι έλλειψη και σε μία από τις εστίες της βρίσκεται ο ήλιος». Η μικρότερη απόσταση της γης από τον ήλιο (περιήλιο) είναι 148 χιλιάδες χιλιόμετρα και η μεγαλύτερη (αφήλιο) 152 χιλιάδες χιλιόμετρα. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων και το νόμο του Kepler, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς της γης γύρω από τον ήλιο. **(Έλλειψη)**

Johannes Kepler

Δ9) Ο πύργος ψύξης κάθε ατμοηλεκτρικού εργοστασίου έχει σχήμα υπερβολοειδούς εκ περιστροφής (είναι το στερεό που προκύπτει από την περιστροφή στο χώρο μιας υπερβολής γύρω από τον άξονα συμμετρίας της που δεν την τέμνει), όπως φαίνεται στη διπλανή φωτογραφία. Η εξίσωση της υπερβολής που χρησιμοποίησε ο αρχιτέκτονας για να σχεδιάσει τον πύργο ψύξης ενός ατμοηλεκτρικού εργοστασίου, είναι: $\frac{x^2}{10^2}-\frac{y^2}{15^2}=1$. Αν ο πύργος ψύξης έχει ύψος 45 μέτρα και η κορυφή του είναι 15 μέτρα πάνω από το κέντρο της υπερβολής, τότε ποια είναι τα εμβαδά της κορυφής και της βάσης του πύργου; Η κατασκευάστρια εταιρεία του σταθμού, για να προϋπολογίσει το κόστος κατασκευής του σταθμού, ζήτησε από τον αρχιτέκτονα να υπολογίσει, έστω και προσεγγιστικά, το εμβαδόν της παράπλευρης κοίλης επιφάνειας του πύργου ψύξης. Μπορείτε να βοηθήσετε τον αρχιτέκτονα στον υπολογισμό; **(Υπερβολή)**

Δ10) Κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, οι ιδιότητες μιας υπερβολής μπορούν να χρησιμοποιηθούν και να εντοπισθεί η θέση ενός πλοίου. Δύο ραδιοφωνικοί σταθμοί έχουν απόσταση 100km κατά μήκος μιας ευθείας ακτογραμμής. Ένα πλοίο πλέει παράλληλα στην ακτή και απέχει από την στεριά 60km. Το πλοίο εκπέμπει σήμα κινδύνου το οποίο λαμβάνει ο κοντινότερος σταθμός σε 0,4 msec, και ο πιο μακρινός σε 0,5 msec. Τα ραδιοκύματα «ταξιδεύουν» με ταχύτητα περίπου 300km/msec. Να χρησιμοποιηθούν τα παραπάνω δεδομένα για να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που δίνει τη θέση του πλοίου. **(Υπερβολή)**

ΣΧΟΛΙΑ

Είναι προφανές ότι η πρότασή μας για τη διδασκαλία εφαρμογών των Μαθηματικών στη ζωή και τις άλλες επιστήμες δε σημαίνει την απόρριψη προβλημάτων με καθαρά μαθηματικό περιεχόμενο. Μόνο που τα προβλήματα αυτά, θα πρέπει να μην είναι τετριμμένα και επαναλαμβανόμενα, αλλά αντιθέτως να είναι προκλητικά και να βοηθούν στη βαθύτερη κατανόηση και εμπέδωση των μαθηματικών εννοιών. Για παράδειγμα δεν έχουν έννοια τα προβλήματα όπως τα:

i) Ποια είναι η εφαπτομένη δοσμένης έλλειψης που φέρνουμε από ένα σημείο;

ii) Ποιες είναι οι εφαπτομένες που είναι παράλληλες σε δοθείσα ευθεία;

iii) Ποιες είναι οι εφαπτομένες που είναι κάθετες σε δοθείσα ευθεία;

Σε αντίθεση με τα παραπάνω «προβλήματα» το:

- Μπορούμε να κατασκευάσουμε με κανόνα και διαβήτη την εφαπτομένη έλλειψης σε δεδομένο της σημείο;

αναγκάζει διδάσκοντες και διδασκομένους να εικάσουν, να προσπαθήσουν, να κρίνουν, να εξερευνήσουν, με αποτέλεσμα να κατανοήσουν σε ένα βαθύτερο επίπεδο την έννοια της εφαπτομένης. Στο πνεύμα αυτό είναι τα προβλήματα Α1, Α2, που δεν μας καλούν απλώς να λύσουμε ένα σύστημα γνωστής μορφής, αλλά καλούμαστε να διερευνήσουμε τη λύση των προβλημάτων.
Το πρόβλημα Α3 αφορά γραμμικό προγραμματισμό, του οποίου η λύση ανάγεται, ως γνωστόν, στη λύση γραμμικού συστήματος ανισώσεων, θέμα που είναι εκτός της ύλης της Β’ Λυκείου. Ένα συνηθισμένο φαινόμενο στην ελληνική δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι να καταναλώνονται οι διδάσκοντες σε συζητήσεις που αφορούν στο τι είναι ή δεν είναι μέσα στη διδακτέα ύλη και στις διάφορες οδηγίες διδασκαλίας που έρχονται από το Υπουργείο Παιδείας. Αλλά ο πραγματικός δάσκαλος είναι κατ’ εξοχήν ένα ελεύθερο δημιουργικό πνεύμα. Με την έννοια αυτή, οφείλει και πρέπει να διδάσκει πέρα από τα καθιερωμένα, πέρα από οποιοδήποτε αναλυτικό πρόγραμμα, αρκεί να εμφυσά στου μαθητές του το πνεύμα της συνεχούς αναζήτηση και προβληματισμού, πράγμα που μπορεί να πραγματοποιηθεί με αναφορές και εφαρμογές της διδακτέας ύλης πέρα από τα συνηθισμένα. Είναι γνωστό ότι μία από τις κορυφαίες στιγμές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η παραγωγή των νόμων του Kepler από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης και αντίστροφα, όπως αναφέρεται στα «Πριγκίπια» του Νεύτωνα. Είναι αδιανόητο να μην διδάσκονται αυτά στο μάθημα των Κωνικών Τομών (δες D. L. Goodstein, J. R. Goodstein, Feynman’s Lost Lecture, W. W. Norton & Co, USA, 1996, ελληνική μετάφραση με τίτλο, «Η χαμένη διάλεξη του Feynman, μετάφραση Πωλίνα Αγαπάκη, Κάτοπτρο, Αθήνα, 1997).
Προφανώς για τη λύση του προβλήματος Α4, χρειάζεται ο τύπος: 2ημασυνα=ημ2α, που δε διδασκόταν της σχολική χρονιά που πέρασε. Αυτή η περίεργη δημαγωγία του

Υπουργείου Παιδείας για μείωση κάθε τόσο της διδακτές ύλης, μας αφήνει κατάπληκτους. Πώς είναι δυνατόν η μαθηματική γνώση να αυξάνεται από χρόνο σε χρόνο, και η διδακέα ύλη στο Λύκειο να μειώνεται από χρόνο σε χρόνο. Ένας δείκτης της ύλης των Μαθηματικών που διδάσκεται διεθνώς στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι η εξεταστέα ύλη στο International Baccalaureat, η οποία περιέχει εισαγωγή στη γραμμική άλγεβρα, εισαγωγή στη συνδυαστική ανάλυση, εισαγωγή στη θεωρία γραφημάτων, εκτός της εισαγωγής στην ανάλυση. Σε αντίθεση, στην Ελλάδα καταναλωνόμαστε σε ανούσιες επαναλήψεις του «υπάρχει».

Είναι συνήθεια στα διδακτικά ελληνικά βιβλία των Μαθηματικών, οι απαντήσεις να είναι ακέραιοι αριθμοί, πράγμα που δημιουργεί στους μαθητές την εντύπωση ότι όλα είναι ακέραιοι αριθμοί, ενώ στην πραγματικότητα όλες οι μετρήσεις είναι προσεγγιστικές. Είναι καιρός να συμφιλιωθούμε με την πραγματικότητα. Στο πνεύμα αυτό είναι τα προβλήματα Γ6, Γ7, Γ8.

Η βαθιά μελέτη της φύσης είναι η πιο γόνιμη πηγή μαθηματικής ανακάλυψης.

Joseph Fourier

Εκτός των άλλων τα Μαθηματικά θα έπρεπε να παρουσιάζονται και ως ένα πανίσχυρο εργαλείο για την ερμηνεία φυσικών φαινομένων. Επομένως, παρατηρώντας διάφορα φυσικά φαινόμενα, μπορούμε να διατυπώσουμε προβλήματα όπως: το Γ5, Γ10. Το Γ10 παραπέμπει στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα, του οποίου μία στοιχειώδης, πλην όμως ελλιπής λύση αναφέρεται στο **[37]**, και η πλήρης λύση του οποίου υπάρχει στο «V. M. Tikhomirov, "Stories about maxima and minima", Mathematical World Volume 1, American Mathematical Society, USA, 1990» (ελληνική μετάφραση με τίτλο «ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα», μετάφραση Κ. Γαβράς, Γ. Κατσιλιέρης, Κάτοπτρο, Αθήνα, 1999). Κατ' αναλογία με το Γ10 θα μπορούσαμε να θέσουμε το ερώτημα: γιατί οι πλανήτες και ο ήλιος έχουν σφαιρικό σχήμα: ένα άλλο ερώτημα θα μπορούσε να ήταν:

Λεοπάρδαλη, ζέβρα, καμηλοπάρδαλη, τίγρης

Γιατί τα παραπάνω ζώα, αν και ζουν στην ίδια περιοχή (Σαβάνα της Αφρικής), έχουν διαφορετικά σχήματα στο τρίχωμά τους; Η λύση του προβλήματος ξεφεύγει κατά πολύ από την ύλη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, πλην όμως καλό θα ήταν να τεθεί το ερώτημα και να διευκρινισθεί ότι λύθηκε με τη βοήθεια των Μαθηματικών, από τον μεγάλο Άγγλο μαθηματικό Alan Turing. Άλλο παράδειγμα θα μπορούσε να είναι η αναφορά στην κίνηση Brown.

Από όλα τα προηγούμενα βγαίνει το συμπέρασμα ότι όσοι ασχολούμαστε με την εκπαίδευση έχουμε καθήκοντα: να αναζητούμε συνεχώς, να προβληματιζόμαστε, να θέτουμε καινούρια ερωτήματα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) S. Adamson, F. C. Wilson, Applied Calculus, Houghton Miffin Harcourt Publishing Company, New York, 2009

2) Ι. Λ. Αραχωβίτη, Εφαρμογές των θεωρητικών Μαθηματικών, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1998

3) Α. Αρβανιτογεώργιος, Α. Βαλαριστός, Προβλήματα Μαθηματικής Μοντελοποίησης, πρακτικά 14ου Π.Σ.Μ.Π., Ε.Μ.Ε., Αθήνα, 1997

4) R. A. Barnett, M. R. Ziegler, Precalculus – Functions and Graphs, McGraw Hilll Book Company, New York, 1989

5) Β. Βισκαδουράκης, Μια πρόταση για ανανέωση και εμπλουτισμό των αναλυτικών προγραμμάτων και μαθηματικών στις δύο τελευταίες τάξεις του Λυκείου, πρακτική 21ου Π.Σ.Μ.Ε., Ε.Μ.Ε., Αθήνα, 2004

6) Canadian Mathematics Competition Problems, Volume 6, Waterloo Mathematics Foundation, Canada, 1988

7) J. W. Coburk, J. D. Heradlick, Precalculus – Graphs and Models, McGraw Hill, New York, 2012

8) B. Conedenko, Συμβουλή στην προετοιμασία του δασκάλου των μαθηματικών, Μαθηματική Επιθεώρηση, τεύχος 5, Ε.Μ.Ε., Αθήνα 1977

9) S. R. Costenoble, S. Waner, Finite Mathematics and Applied Calculus, Brooks/Cole, 2007

10) Γ. Δάσιος, Ο ρόλος των μαθηματικών στην κοινωνία και των μαθηματικών στην τάξη, Ευκλείδης Γ', τεύχος 59 (ομιλία στο 16ο πανελλήνιο συνέδριο μαθηματικής παιδείας, Λάρισα, Νοέμβριος 1999)

11) B. H. Edwarards, R. Larson, Calculus, Ninth Edition, Brooks/Cole, USA, 2010

12) Β. Ευσταθόπουλος, Η λύση των προβλημάτων και ο ρόλος της κατάστασης - πρόβλημα στις μαθησιακές διαδικασίες, Ευκλείδης Γ', τεύχος 16, ΕΜΕ, Αθήνα 1987

13) R. L. Finney, M. D. Weir, F. R. Giordano, Thomas' Calculus, Tenth Edition, Addisson Wesley Longman, USA 2001 (Ελληνική μετάφραση με τίτλο THOMAS Απειροστικός λογισμός, μετάφραση Μ. Αναγνωστάκης, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2005)

14) P.A. Foerster, Calculus – concepts and Applications, Key Curriculum Press, USA, 2005

15) J. S. Hartzler, F. Swetz (Editors), Mathematical Modeling, NCTM, Reston, 1996

16) Γ. Θωμαΐδης, Προέλευση και εφαρμογές της θεωρίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών, Ευκλείδης Γ', τεύχος 13, Ε.Μ.Ε., Αθήνα, 1986

17) H. R. Jacobs, Geometry, W. H. Freeman Company, San Francisco, USA, 1974

18) Δ. Καραγεώργος, Εμπέδωση Μαθηματικών εννοιών με προβλήματα της καθημερινής ζωής, Ευκλείδης Γ', τεύχος 48, ΕΜΕ, Αθήνα 1993

19) Β. Κατσαργύρης, Επίλυση Προβλήματος, Ευκλείδης Γ', τεύχος 65.

20) Β. Κατσαργύρης, Επίλυση προβλήματος με τη βοήθεια του Ολοκληρωτικού Λογισμού, Ευκλείδης Γ', τεύχος 67

21) Christin Keitel, Διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών σε διεπιστημονικό πλαίσιο: τα μαθηματικά και η κοινωνική πρακτική τους μέσα στην τάξη, Θέματα διδακτικής μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Gutenberg, Αθήνα, 2000

22) Γ. Κερασίδης, Τα μαθηματικά ως μέσο επίλυσης προβλημάτων που μας θέτουν η φύση και η κοινωνία, πρακτικά 26^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Θεσαλλονίκης 2009, Ε.Μ.Ε., Αθήνα 2009.
23) Ν. Κλαουδάτος, Η διδασκαλία των μαθηματικών με πραγματικά προβλήματα και εφαρμογές – πού βρισκόμαστε σήμερα, πρακτικά 17^{ου} Π.Σ.Μ.Π., Ε.Μ.Ε., Αθήνα, 2000
24) Ν. Κλαουδάτος, Μοντελοποίηση: Ένα ισχυρό διδακτικό εργαλείο, Πρακτικά 6^{ου} Π.Σ.Μ.Π., Ε.Μ.Ε., Αθήνα, 1989
25) Ν. Κλαουδάτος, Οι πρόσφατες εξελίξεις στη λύση προβλημάτων και στη μοντελοποίηση και τις εφαρμογές των μαθηματικών, Ευκλείδης Γ', τεύχος 23, ΕΜΕ, Αθήνα 1989
26) Α. Μητροπούλου, Απ' την εμπειρική καθημερινότητα στη σχολική πραγματικότητα, πρακτικα 14^{ου} Π.Σ.Μ.Π., Ε.Μ.Ε., Αθήνα, 1997
27) R. B. Minton, R. T. Smith, Calculus, Fourth Edition, Thomson Brooks/Cole, USA, 2007
28) Χ. Μιχαήλ – Νικολαΐδου, Μιχαήλ Χρύσιππος, Η σχέση των μαθηματικών με την τεχνική και η παρουσίαση των μαθηματικών εφαρμογών ως μαθησιακό κίνητρο, πρακτικά 11^{ου} Π.Σ.Μ.Π., Ε.Μ.Ε., Αθήνα, 1994
29) Α. Μπούφη, Διδασκαλία των Μαθηματικών μέσα από τις εφαρμογές τους, πρακτικά 3^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε., Αθήνα, 1986
30) Σ. Ορφανός, Τα επιστημολογικά εμπόδια της μαθηματικοποίησης, πρακτική 20^{ου} Π.Σ.Μ.Ε., Ε.Μ.Ε., Αθήνα, 2003
31) Ι. Παναγάκος, Η διαθεματική προσέγγιση στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, πρακτική 21^{ου} Π.Σ.Μ.Ε., Ε.Μ.Ε., Αθήνα, 2004
32) Β. Κ. Παπαζάχος, Πρόγνωση Σεισμών, Η Φυσική σήμερα ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1991
33) Τ. Παπαϊωάννου, Τα μαθηματικά στο Λύκειο από τη σκοπιά του πανεπιστημίου, πρακτικά 5^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε., Αθήνα, 1987
34) G. Polya, How to solve it, Princeton University Press, Princeton, 1973 (ελληνική μετάφραση με τίτλο: «Πώς να το λύσω;», μετάφραση Λάμπης Σιαδήμας, Εκδόσεις Σπηλιώτη)
35) Δ. Πόταρη, Β. Σπηλιωπούλου, Διεπιστημονικά πλαίσια δερεύνησης των αντιλήψεων των μαθητών στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες, πρακτικά 12^{ου} Π.Σ.Μ.Π., Ε..Μ.Ε., Αθήνα, 1997
36) Michael Serra, Discovering Geometry, Key Curriculum Press, USA, 1997
37) I. F. Sharygin, Από ένα ρωμαϊκό μύθο στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα, Quantum, Τόμος 4, τεύχος 2
38) J. Stewart, Calculus, Seventh Edition, Brooks/Cole, USA, 2012
39) Θ. Ν. Τομαράς, Σημειώσεις Κοσμογραφίας, Ηλεκτρονικά Μαθήματα Φυσικού Τμήματος Πανεπιστημίου Κρήτης
40) Μ. Τουμάσης, Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των μαθηματικών, Εκδόσεις Κωστόγιαννος, Χαλκίδα, 1999
41) Μ. Τουμάσης, Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών, Gutenberg, Αθήνα, 1994
42) Γ. Τσαπακίδης, Ταξίδι στη Γεωμετρία, Ευκλείδης Α', τεύχος 80
43) Γ. Τσαπακίδης, Το Πυθαγόρειο Θεώρημα, Ευκλείδης Β', τεύχος 73
44) Γ. Φιλίππου, Η σημασία των εφαρμογών στα σχολικά Μαθηματικά, πρακτικά 1^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε., Αθήνα 1984

45) Α. Χαλάτσης, Λύση προβλημάτων και Μαθηματική Εκπαίδευση. Ευκλέιδης Γ', τεύχος 38, ΕΜΕ, Αθήνα 1993
46) Α. Χατζηγεωργίου, Διδασκαλία των μαθηματικών με διαθεματικές δραστηριότητες, Ευκλείδης Γ', τεύχος 60 – 61.